複素力学系のモノドロミー

荒井迅（北海道大学）

力学系の分岐を複素化して見直すと，新しい構造が見えてくる．この話題を，エノン写像

$$H_{a,b} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (a - x^2 + by, x)$$

という単純だが非常に重要な力学系を題材に解説する．

ここでモノドロミーというのは，微分方程式のモノドロミー理論のように時間の空間内で考えるモノドロミーではなく，パラメータの空間内でのモノドロミーである．最も単純なサドル・ノード分岐でさえも，複素化してモノドロミーの観点で考えてみると，リーマン面としての非自明な構造が見えてくる．そのような分岐点が無限個集ってフラクタル構造をなしたものが「マンデルブロ集合」と呼ばれる集合であり，我々のモノドロミーは，マンデルブロ集合を一般化したパラメータ空間の集合の回りをパラメータが回ったときに，解にどのような変化が起きるかを記述するものである．通常の線型常微分方程式のモドロミー理論と異なり，「解の空間」の自己同型群が非常に複雑かつ巨大なため，時には整数論の結果などを援用する事になる．

また，このモノドロミー理論は複素力学系だけでなく実力学系への応用も考えられる．エノン写像を実平面に制限した写像は，いわゆる「カオス」を発生させる最も基本的な構造であるスメールの馬蹄形写像が分岐により構築される過程を典型的にとらえるものであるが，その分岐構造は 1 次元のロジスティック写像と比べて格段に複雑であり，数学的に完全な記述方法は知られていない．物理学者の Cvitanović らにより Pruning Front という手法が提案されているが，数学的に正当化されてはない．そこでモノドロミー理論を用いると，限定された状況に対してではあるが，Pruning Front を正当化する事が出来る．

参考文献

Zin Arai, “On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map and their monodromies”, preprint.

Zin Arai and Yutaka Ishii, “On parameter loci of the Hénon family”, preprint.