Grushin type 作用素の基本解の表示と Kohn-Laplacian への応用

岩崎千里
兵庫県立大学大学院物質理学研究科

Grushin type operator

$$P_{k,\lambda} = -\left(\Delta_x + |x|^{2k}\Delta_z - i|x|^{k-1} < \lambda, \frac{\partial}{\partial z} >\right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{N+\ell}$$

$x \in \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2), \quad z \in \mathbb{R}^\ell$ with parameter $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in \mathbb{C}^\ell$

この作用素は
M.I. Visik and V.V. Grushin, Mat. Sb. 79(1969),
V.V.Grushin, Mat. Sb.,84(1971)
等において準楕円性、局所可解性、評価について研究された.

$\lambda = 0$ の主結果

Theorem 0.1 *Suppose* $(x, z) \neq (x', z') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\ell$.
(I) If $\ell = 2q$, *then*

$$(P_{k,0})^{-1}((x, z), (x', z')) = \frac{k+1}{2\pi} F_{q,k,N}(\beta, \gamma).$$

(II)If $\ell = 2q - 1$, *then*

$$(P_{k,0})^{-1}((x, z), (x', z')) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_\beta^\infty F_{q,k,N}(u, \gamma) \frac{1}{\sqrt{u - \beta}} du.$$

$$\gamma = |x|^{k+1}|x'|^{k+1}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left\{|x|^{2(k+1)} + |x'|^{2(k+1)} + (k+1)^2|z - z'|^2\right\}.$$

$$F_{q,k,N}(u, \gamma) = \left(\frac{-(k+1)^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}\right)^{q-1} F_{1,k,N}(u, \gamma) \quad (q \geq 2)$$
$$F_{1,k,N}(u, \gamma) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \frac{u_+ - u_-}{(u_+^{k+1} - u_-^{k+1})\left\{u_+ + u_- - 2 < x, x' >\right\}^{N/2}},$$

ここで

$$u_\pm = u_\pm(u, \gamma) = (u \pm \sqrt{u^2 - \gamma^2})^{1/(k+1)}.$$

$\lambda \neq 0$ および応用

$\lambda \neq 0$ の場合も同様な手法で結果を得るが，この得られた表示により λ に関すして可算無限個の極を除いて meromorphic extension できることも示せた．さらにこの手法は Kohn-Laplacian model に応用出来る．

複素多様体 M 上の $\overline{\partial}$-Neumann problem

- $\overline{\partial}$-Neumann problem は coercive な境界値問題ではない.
- この問題は 境界 ∂M 上の degenerate operator の問題に帰着できる.
  (J.J.Kohn and H.Rossi, Ann. of Math. 81(1965))
- M が strongly pseudoconvex (the Levi form が positive definite)
  $\Longleftrightarrow$ 良い評価を持つ.

Kohn-Laplacian model

$$\Delta_\lambda = -\frac{1}{2}(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z) - \frac{1}{2}\lambda[Z, \bar{Z}]$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} + im\bar{z}|z|^{2m-2}\frac{\partial}{\partial s}, \quad \bar{Z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - imz|z|^{2m-2}\frac{\partial}{\partial s},$$

$m \in \mathbb{N}, \quad m = 1 \Leftrightarrow \{\text{strongly pseudoconvex case}\}$

証明における key proposition

$$Q = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} - a^2r^2 + c\right) \quad (a \geq 0).$$

Proposition 0.2 *e^{-tQ} has the kernel function $U(t,r,R)$*

$$U(t,r,R) = \frac{a}{\sinh 2at}\exp\left\{-\frac{a\coth 2at}{2}(r^2+R^2) + ct\right\} I_\nu\left(\frac{arR}{\sinh 2at}\right).$$

詳細については以下の二編の論文を参照されたい．

[1] W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki:*The fundamental solution of a higher step Grushin type operator*, Advances in Math. 271(2015), 188-234.

[2] W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki:*The inverse of a parameter family of degenerate operators and aplicatuins to the Kohn-Laplacian*, Advances in Math. 277(2015), 283-337.