Maxwell 方程式(系)の解の界面正則性とその一般化

加納誠・佐藤友彦 (日大・生産工) ・渡辺一雄(学習院・理)

先に, この問題を考えるきっかけとなった数理医学 ([1,2]) の話題から講演を始めます. 数学的な内容に関しては三次元での話を主として講演をします.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を境界が滑らかな有界領域とする. $B(x) = (B^1(x), B^2(x), B^3(x))$, $J(x) = (J^1(x), J^2(x), J^3(x))$ を $\mathbb{R}^3$-値関数 $(x \in \Omega)$ とし, $g = g(x)$ を実数値関数, $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ とする. $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ を超曲面とする.

$\mathcal{M}$ によって Ω が 2 つの領域 $\Omega_\pm$ に分けられている状況を考え, $\Gamma = \Gamma_\pm = \Omega \cap \mathcal{M}$ を $\Omega_\pm$ の界面, ν を Γ_- 上の外向単位法ベクトルとする. 界面上の点 $x \in \Gamma$ に対して,

$$B_\pm(x) := \lim_{\Omega_\pm \ni \xi \to x} B(\xi), \qquad [B]_-^+ := B_+ - B_- \text{ on } \Gamma$$

とする. また,

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 | \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\}$$

$$H(\mathrm{rot}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 | \nabla \times u \in L^2(\Omega)^3\}$$

とする.

$$(1) \begin{cases} \nabla \times B = J \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \text{in } \Omega_\pm, \quad (2) \begin{cases} \nabla \times B = 0 \\ \nabla \cdot B = g \end{cases} \text{in } \Omega_\pm.$$

の解 B の界面における正則性について考える.

定理 A.(Kobayashi, Suzuki and Watanabe.[3]) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界を持つ有界領域, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ を C^∞-曲面とする $(\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset, \Omega = \Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathcal{M}) \cup \Omega_-)$. $J \in H(\mathrm{rot}, \Omega_\pm)$ とし, $B \in H^1(\Omega)^3$ を (1) の解とする, この時, $\nu \cdot B \in H^2_{loc}(\Omega)$ が成り立つ.

定理 B.(Kanou, Sato and Watanabe.[4]) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界を持つ有界領域, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ を C^∞-曲面とする $(\mathcal{M} \cap \Omega \neq \emptyset, \Omega = \Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathcal{M}) \cup \Omega_-)$. $g \in H^1(\Omega_\pm)$ とし, $B \in H^1(\Omega)^3$ を (2) の解とする, この時, $\nu \times B \in H^2_{loc}(\Omega)^3$ が成り立つ.

Remark 1 (1) の方程式系に関しての $B \in H^1(\Omega)$ から, $B \notin H^2(\Omega)$ となる例は講演の中で紹介する.

$g \in H^1(\Omega_\pm)$ とし, $B \in H^1(\Omega)$ を (2) の解とすると, $\nu \cdot B \in H^2_{loc}(\Omega)$ は一般的には成り立たない. この事は, 次の反例により簡単に説明できる.

$\mathcal{M} = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_3 = 0\}, \Omega = \{|x| < 1\}, \nu = (0,0,1), B = (0,0,|x_3|)$ とし, g を

$$g = \begin{cases} 1, & (x_3 > 0) \\ -1, & (x_3 < 0) \end{cases}$$

とすると, B と g は (1) を満たす. 実際, $\nabla \cdot B = \partial_{x_3} B^3 = \partial_{x_3} |x_3| = g$, $\nabla \times B = (0,0,0)$. しかし, $n \cdot B = |x_3| \notin H^2_{loc}(\Omega)$ である.

証明は, Stokes の定理, Gauss の発散定理, (超函数の) 楕円型正則性定理に基づく.

これらの定理を"高次元", "Riemann 多様体" に一般化した. ([4],[5].) この場合, 外微分, 余微分, $B = \sum_i B^j dx_i$, $J = \sum_{i<j} (J^i - J^j) dx_i \wedge dx_j$ を使って表される.

References

1. D.B. Geselowitz, *On the magnetic field generated outside an inhomogeneous volume conductor by internal current sources,* IEEE trans. Magn. **6** (1970) pp. 346–367.

2. 鈴木貴, 数理医学入門, 共立講座 数学の輝き, 共立出版 (2015)

3. T. Kobayashi, T. Suzuki and K. Watanabe, *Interface vanishing for solutions to Maxwell and Stokes systems,* J. Math. Fluid Mech. **8** (2006), pp.382–397.

4. M. Kanou, T. Sato and K. Watanabe, *Interface regularity of the solutions for the rotation free and the divergence free systems in Euclidian space,* Tokyo J. Math., **36**, No. 2, (2013), pp.473–482

5. M. Kanou, T. Sato and K. Watanabe, *Interface regularity of the solutions to Maxwell systems on Riemannian manifolds,* to appear in Tokyo Journal of Mathematics.